Laboratorio P.L.S. 2012/13 e 2013/14

"L'Infinito Matematico: Alcune Suggestioni"

Dott. Andrea Bonfiglioli – Dipartimento di Matematica, Bologna

Email: andrea.bonfiglioli6@unibo.it

PRIMO INCONTRO:

- Evidenza "geometrica" (e pericolosità) del concetto di serie
- Il "bluff" della rappresentazione decimale
  - Definizione di successione infinitesima
- Il Paradosso di Zenone
- Le serie di numeri reali
  - La serie geometrica
  - La necessità di una definizione formale
- La serie armonica e il logaritmo
- Operazioni illecite sulle serie

♦♦♦

SCOPI DEL PRIMO INCONTRO

Ecco, in pillole, alcuni degli scopi che ci proponiamo per il primo nucleo tematico, *le serie di numeri reali.*

1. Convincere lo studente della necessità, geometrica e algebrica, di introdurre il concetto di "somma di infiniti numeri reali" e della sua naturalezza e ragionevolezza;

2. convincere lo studente che, al di là della naturalezza di tale concetto, esso è un concetto *nuovo* che, per sua natura, non può seguire le stesse leggi delle somme finite (commutativa e associativa, ad esempio): ogni concetto che coinvolge l'infinito matematico va trattato con cautela;

3. far crollare nello studente il pregiudizio per cui una somma di infiniti numeri reali positivi debba dare infinito;

4. allo stesso tempo, far crollare nello studente il pregiudizio per cui una somma di infiniti numeri sempre più piccoli dia un numero reale.

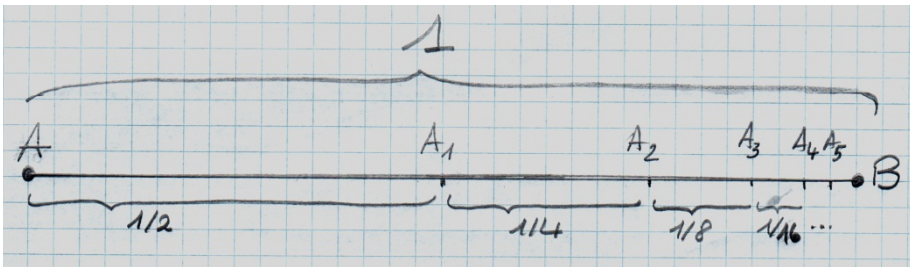
♦♦♦

§1. Evidenza "geometrica" (e pericolosità) del concetto di serie

Ci sembra opportuno e incoraggiante introdurre allo studente l'evidenza geometrica della necessità di un concetto di somma di infiniti numeri col seguente argomento:

Un segmento AB di lunghezza unitaria può essere decomposto nell'unione di infiniti segmenti contigui nel modo seguente:

AA_1 è ottenuto dividendo a metà AB, A_1A_2 è ottenuto dividendo a metà A_1B, A_2A_3 è ottenuto dividendo a metà A_2B, etc... Ne segue che, essendo la misura di AB uguale a 1, la misura di AA_1 è 1/2, quella di A_1A_2 è 1/4, quella di A_2A_3 è 1/8, etc...



Visto che AB risulta l'unione degli intervalli AA_1, A_1A_2, A_2A_3,... e che essi si intersecano al più in un punto (che ha lunghezza nulla!), *sembra naturale attribuire al simbolo di somma infinita* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ *il valore 1.*

Introducendo il simbolo $+\infty$ per denotare la "lunghezza" di una semiretta s di origine O, decomponendo s nell'unione di infiniti segmenti contigui di lunghezza 1 (e intersecantisi solo in uno dei vertici), data l'evidente esistenza di un numero infinito di tali segmenti, sembra altrettanto naturale attribuire alla somma infinita 1+1+1+1+... il valore $+\infty$.

Riassumendo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1, \qquad\qquad 1+1+1+\cdots=+\infty.$$

Nonostante l'apparente "innocenza" con cui sono state introdotte queste scritture, è opportuno mettere in guardia da subito lo studente che **questi sono solo simboli** e ogni manipolazione di essi che voglia simulare le proprietà algebriche usuali della somma sono assolutamente immotivate. Un esempio banale: quale valore può avere la "somma"

$$S=1-1+1-1+1-1+\cdots=?$$

Usando la legge associativa (perchè poi questa dovrebbe valere?) si avrebbe da un lato

$$S=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-S$$

e quindi 2S=1 ossia S=1/2; d'altra parte (sempre per l'associativa)

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0,$$

o ancora

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - ((1-1) + (1-1) + \cdots) = 1 - 0 = 1.$$

Spostando opportunamente gli addendi (con una illecita legge commutativa) si potrebbe arrivare anche alla seguente identità (si noti una qualche analogia coi processi legati ai paradossi dell'infinito insiemistico *à la* Hilbert...):

$$S = 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= (1-1) + 1 + (1-1) + 1 + 1 + (1-1) + 1 + 1 + 1 + (1-1) + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

$$= 0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 3 + 0 + 4 + \cdots = +\infty.$$

[**Per il Docente**: Si poteva invitare lo studente a "commutare" i termini della serie in modo da ottenere $+\infty$. Ci si sinceri che lo studente non proponga 1+1+1+1+1+1+... come commutazione dei termini: anche i -1 devono comparire, e devono farlo infinite volte...Anche questo problema è legato all'infinito insiemistico su cui torneremo nelsecondo incontro.]

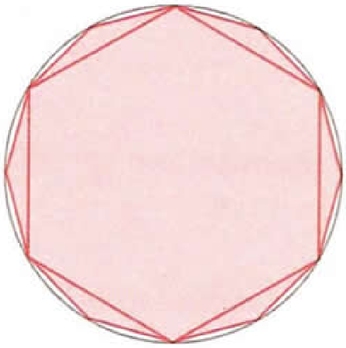
Questo dovrebbe essere sufficiente per mettere in guardia lo studente sulla *non liceità della legge associativa o commutativa per le somme infinite*. Per quanto riguarda la non liceità della legge commutativa, daremo un altro esempio non banale in seguito.

Dato l'evidente bisogno che la Matematica ha di rendere rigoroso l'esempio della misura del segmento scomposto in infiniti addendi, quanto sopra convincerà lo studente della necessità di una definizione rigorosa del concetto di "somma infinita", detto, da ora in poi, "serie". Daremo questa definizione come ultimo step della presentazione in classe, dopo che lo studente si sarà convinto che quella è l'unica definizione rigorosa possibile.

Un'altra prova evidente dell'esistenza geometrica delle serie (o alternativamente del concetto di limite) ci viene dal famoso problema della quadratura del cerchio. Lo studente che coglierà l'analogia tra l'identità

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$$

e la figura seguente



sarà già molto avanti nella comprensione dell'Infinito Matematico. In parole povere, *l'area del cerchio gioca lo stesso ruolo nei confronti dell'area dei poligoni inscritti che il numero 1 gioca neiconfronti delle somme parziali*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Nessuna di queste somme parziali esaurisce l'1 esattamente come nessuna delle aree dei poligoni inscritti esaurisce l'area del cerchio, tuttavia *ciascuna fornisce una approssimazione quanto si vuole appropriata dell'infinito in atto che tende ad approssimare* (l'1 per le citate somme parziali, l'area del cerchio per le aree dei poligoni inscritti).

§2. Il bluff della rappresentazione decimale

Ogni studente di I Superiore è in grado di capire (anzi, fors'anche di ricordare dalle Scuole Medie) che nella divisione

$$10:3$$

otteniamo un 3 col resto di 1 e quindi, se ci spingiamo oltre nella divisione per ottenere le prime cifre decimali, si ottiene

$$10:3=3,3333333333333333333333.....$$

ossia, con la notazione periodica,

$$\frac{10}{3}=3,\overline{3}.$$

Dividendo per 10:

$$\frac{1}{3}=0,\overline{3}$$

e poi moltiplicando per 3:

$$1=0,\overline{9},$$

si ottiene la risposta ad uno di quei divieti, tanto amati alle Scuole Medie, secondo cui non esistono numeri la cui espressione decimale ha il 9 periodico.

Questi numeri esistono eccome!

La domanda che uno studente dovrebbe porsi ben prima di investigare questo fantomatico 9 periodico è la seguente:

Cos'è la rappresentazione decimale di un numero??

Di fatto (seguendo la terminologia di Aristotele), potremmo dire che è una rappresentazione *in atto* dell'infinito (di fatto Aristotele avrebbe rigettato questo infinito, poiché in atto, giacché secondo Aristotele solo l'infinito potenziale è ammissibile).

In buona sostanza,

l'identità $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ *cela lo stesso processo di infinito matematico*

celato nell'identità $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ *o nell'esaustione dell'area del cerchio*

con quella dei poligoni inscritti.

Quella che normalmente viene data dal docente come una sorta di "notazione" o "definizione" di numero reale (la rappresentazione decimale appunto) nasconde in realtà molto di più: **l'assioma di completezza dei numeri reali.** Questo "bluff", in cui si mette in mano allo studente l'assioma di completezza ben prima che egli abbia gli strumenti cognitivi per comprenderlo, avviene ben prima di quanto non si creda: è infatti credenza comune che il primo momento in cui si deve pagare lo scotto di spiegare allo studente il concetto di completezza (o di "sezioni" di numeri reali, *à la* Dedekind) è quando si vuole giustificare l'esistenza di numeri reali la cui rappresentazione decimale non è né finita né periodica (alias, i numeri irrazionali), come $\sqrt{2}$, π, *e* (numero di Nepero).

Tuttavia, anche nello scrivere $0,\overline{3}$ (che è un numero razionale) ci si appoggia alla completezza. Usualmente, bluffando ulteriormente, si fa accettare allo studente la regola che permette di scrivere un numero periodico sotto forma di frazione:

$$i_1 i_2 \cdots i_h, a_1 a_2 \cdots a_k \overline{p_1 p_2 \cdots p_j} = \frac{i_1 i_2 \cdots i_h a_1 a_2 \cdots a_k p_1 p_2 \cdots p_j - i_1 i_2 \cdots i_h a_1 a_2 \cdots a_k}{99 \cdots 900 \cdots 0}$$

(dove i 9 compaiono j volte e gli 0 compaiono k volte), ad esempio

$$32{,}502\overline{3129} = \frac{325023129 - 32502}{9999000}.$$

Guarda caso però la dimostrazione di tale regola si basa (come si può dimostrare molto semplicemente) sul concetto di serie numerica, il quale ha senso solo in presenza di completezza!!

Le famose serie

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=e, \qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

dimostrano che è impossibile scindere la teoria delle serie convergenti con la completezza di R (si osservi che le successioni delle somme parziali delle serie precedenti danno approssimazioni razionali di numeri irrazionali trascendenti!).

Nel momento in cui si fa accettare allo studente la sensatezza di scritture del tipo $0,\overline{3}$ *si sta automaticamente facendogli accettare che la "somma infinita"*

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{3}{100000}+\cdots$$

ha senso e non può che uguagliare $1/3$*.* Naturalmente, con questo non vogliamo dire che per parlare di numeri periodici (che sono necessariamente razionali) sia indispensabile introdurre il concetto di serie, tuttavia ci sembra di poter affermare senza dubbio che nel momento in cui lo studente accetta la rappresentazione decimale, inavvertitamente *familiarizza col concetto di limite.* Precisamente col concetto di **successione infinitesima.** Infatti, nel momento in cui si compie "l'atto di fede" di accettare l'uguaglianza

$$\frac{1}{3}=0,\overline{3},$$

si accetta che tenda a zero la successione delle differenze

$\frac{1}{3}-0{,}3,\quad \frac{1}{3}-0{,}33,\quad \frac{1}{3}-0{,}333,\quad \frac{1}{3}-0{,}3333,\quad \frac{1}{3}-0{,}33333,\quad \frac{1}{3}-0{,}333333,\quad \ldots$

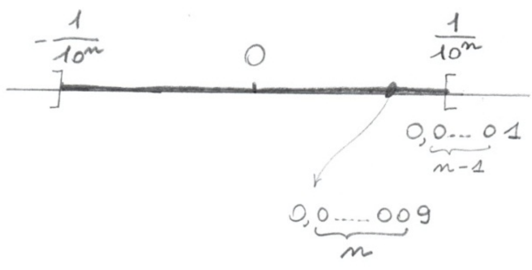
In generale, **lo studente accetta che la successione delle differenze tra un numero reale e le sue approssimazioni successive** ***"tende a zero".***

A questo punto lo studente dovrebbe essere pronto alla:

§2.1 DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE INFINITESIMA

Appare conveniente dare le seguenti definizioni e osservazioni:

1) Per cominciare, dato un numero naturale *n*, osserviamo che i numeri reali compresi nell'intervallo aperto ($-1/10^n$; $1/10^n$) sono precisamente i numeri che hanno, nella loro rappresentazione decimale (almeno) *n* zeri dopo la virgola:



2) Per cominciare con unvalido esempio, si dice che la successione[1] di numeri

0,1=1/10, 0,01=1/100, 0,001=1/1000, ... $1/10^n$, ...
tende a zero (per n che tende a infinito). Si può far accettare in modo assai semplice allo studente questa definizione mostrandogli che nella rappresentazione decimale di $1/10^n$ compare un 1 solo nella posizione decimale *n*-esima e 0 altrove.

3) In generale, data una successione a_1, a_2, a_3, ... di numeri reali, si dice che essa *tende a zero (o che è infinitesima)* se avviene quanto segue:

- Esiste un termine della successione tale che tutti i termini della successione dopo di esso hanno sempre 0 nella prima posizione decimale;
- esiste un termine della successione tale che tutti i termini della successione dopo di esso hanno sempre 0 nella prima e seconda posizione decimale;
- esiste un termine della successione tale che tutti i termini della successione dopo di esso hanno sempre 0 nella prima, seconda e terza posizione decimale;
- etc...

Per il Docente: nelle classi IV e V, conviene dare la definizione formale sia di successione sia di successione infinitesima: la mia proposta è, in prima battuta, di utilizzare $1/10^n$ al posto di epsilon:

- data una successione $(a_k)_k$ di numeri reali, si dice che essa tende a zero (o che è infinitesima) se: per ogni $n \in N$ esiste $k(n) \in N$ tale che $|a_k| < 1/10^n$ ogniqualvolta $k \geq k(n)$. Si farà osservare allo studente che la disuguaglianza

$$|a_k| < 1/10^n$$

equivale allo scrivere

$$a_k \in (-\frac{1}{10^n};\frac{1}{10^n})$$

ossia (vedi punto (1)) al richiedere che a_k abbia almeno *n* zeri dopo la virgola.

In questo modo lo studente dovrebbe accettare “dolcemente” (ossia senza la necessità di dare la definizione di limite di una successione) che la successione $1/2^n$ tende a zero; i primi termini della successione hanno infatti rappresentazioni decimali

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{1}{2^2} = 0{,}25$$

[1] Non sembra indispensabile fornire ora allo studente la definizione formale di successione a_n come funzione a_n=a(n) da N ad R, ma il Docente è invitato a riflettere sulla sua eventuale introduzione.

$$\frac{1}{2^3} = 0{,}125$$

$$\frac{1}{2^4} = 0{,}0625$$

$$\frac{1}{2^5} = 0{,}03125$$

$$\frac{1}{2^6} = 0{,}015625$$

$$\frac{1}{2^7} = 0{,}0078125$$

$$\frac{1}{2^8} = 0{,}00390625$$

$$\frac{1}{2^9} = 0{,}001953125$$

$$\frac{1}{2^{10}} = 0{,}0009765625.$$

Allo stesso modo si può verificare che (fatti di cui ci serviremo nel seguito) le successioni

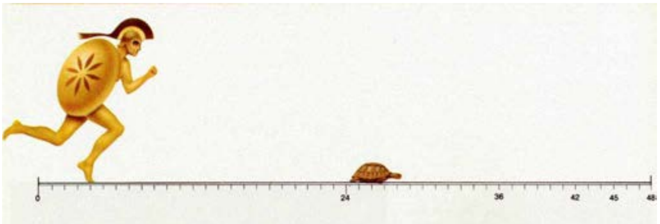
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n ; \left(\frac{1}{4}\right)^n ; \left(\frac{1}{5}\right)^n ; \left(\frac{1}{6}\right)^n ; \left(\frac{1}{7}\right)^n ; \text{etc...}$$

tendono a zero e, più in generale, dato $q \in (0;1)$, anche la successione

$$\boldsymbol{q^n}$$

tende a zero.

§3. Il Paradosso di Zenone (circa V Secolo a.C.!)



Il veloce Achille, dopo aver dato un vantaggio alla lenta Tartaruga, non la raggiungerà mai: infatti, quando Achille avrà raggiunto la posizione iniziale della Tartaruga, questa sarà già avanzata di un tratto (seppur piccolo); quando Achille avrà coperto anche questo tratto, la Tartaruga avanzerà di un altro piccolo tratto e questo processo non ha fine...

[**Per il Docente:** proporre il Paradosso agli studenti esattamente in questa forma (senza aggiungere dati su velocità o posizioni iniziali), osservando la loro reazione; smontare eventuali (giuste!) obiezioni sul fatto che Achille raggiunge la Tartaruga insistendo sulla ***infinità*** dei passi necessari ad Achille per raggiungere la Tartaruga; insistere sul fatto che Achille deve coprire la **somma di infinite distanze**, seppur piccole, prima di raggiungere la Tartaruga.]

Alla base del Paradosso vi è il preconcetto (tipico della matematica Greca dell'epoca, *ma anche di molti nostri studenti!*) che:

«**la somma di infinite quantità dà infinito.**»

Prima di dare la soluzione (moderna) dell'apparente Paradosso, vale la pena insistere sulla

Forza del Paradosso: *Aver posto un problema legato all'Infinito Matematico più di 2000 anni prima che il Calcolo Infinitesimale fosse in grado di rispondervi! Aver evidenziato che l'infinità dei punti della retta* (quella che 150 anni dopo Zenone sarà la retta della Geometria Euclidea e che nel 1600 diventerà la retta di Cartesio) *può creare problemi al senso comune…*

♦ ♦ ♦

Smontiamo il Paradosso:

1. come un problema elementare di Fisica;
2. con l'uso del concetto (non elementare!) di serie numerica.

♦ ♦ ♦

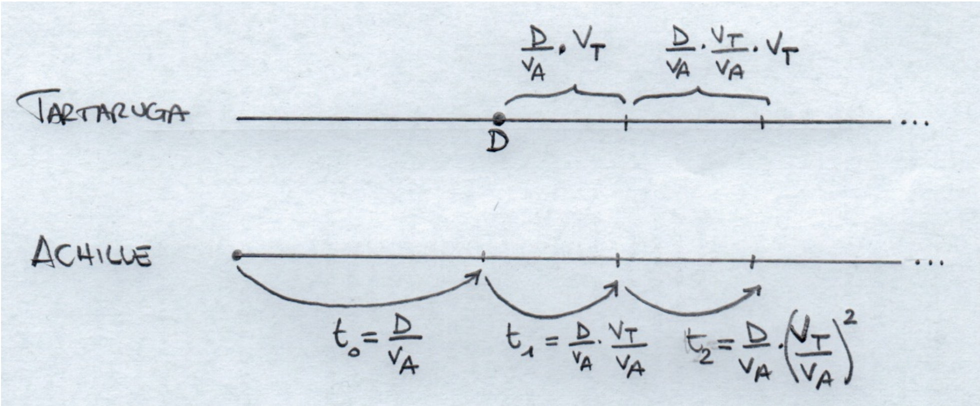
1) Siano V_A e V_T le velocità di Achille e della Tartaruga, supposte costanti, e tali che

$$V_A > V_T.$$

Sia poi D il distacco iniziale tra Achille e la Tartaruga.
Trovare il tempo in cui Achille raggiunge la Tartaruga.

Soluzione: $$V_A \cdot t = D + V_T \cdot t \leftrightarrow t = \frac{D}{V_A - V_T}.$$

2) Pur accettando che la retta orientata su cui si muovono Achille e la Tartaruga sia costituita di infiniti punti (è la retta Cartesiana!), mostriamo come **la somma di infinite quantità spaziali può essere coperta in lasso temporale finito.**



Achille impiega un tempo $t_0 = \frac{D}{V_A}$ per coprire il distacco iniziale; nel frattempo la Tartaruga si è distaccata di uno spazio $\frac{D}{V_A} \cdot V_T$; per coprire questo secondo distacco Achille impiega il tempo $t_1 = \frac{D}{V_A} \cdot V_T \cdot \frac{1}{V_A} = \frac{D}{V_A} \cdot \frac{V_T}{V_A}$; nel frattempo la Tartaruga si è ulteriormente distaccata di uno spazio $\frac{D}{V_A} \cdot \frac{V_T}{V_A} \cdot V_T$ per coprire il quale Achille impiega un tempo $t_2 = \frac{D}{V_A} \cdot \frac{V_T}{V_A} \cdot \frac{V_T}{V_A} = \frac{D}{V_A} \cdot \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^2$...

In generale Achille impiega il tempo

$$\boldsymbol{t_n = \frac{D}{V_A} \cdot \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

per coprire i vari distacchi. *Intuitivamente "per n che tende all'infinito" Achille avrà coperto tutti i distacchi, ossia avrà raggiunto la Tartaruga.*

Ora, la somma di questi infiniti tempi non fa infinito, come mostra l'evidenza Fisica della prima risoluzione. Anzi, se usiamo il simbolo

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} t_n,$$

appare evidente, per quanto osservato sopra, che questo è proprio il tempo in cui Achille raggiunge la Tartaruga, ossia:

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D}{V_A} \cdot \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^n = \frac{D}{V_A - V_T}}.$$

Essendo $\frac{D}{V_A - V_T} = \frac{D}{V_A} \cdot \frac{1}{1 - \frac{V_T}{V_A}}$ abbiamo ottenuto la formula:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{V_T}{V_A}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{V_T}{V_A}}$$

valida nell'ipotesi fondamentale $V_A > V_T$ ossia $\frac{V_T}{V_A} < 1.$

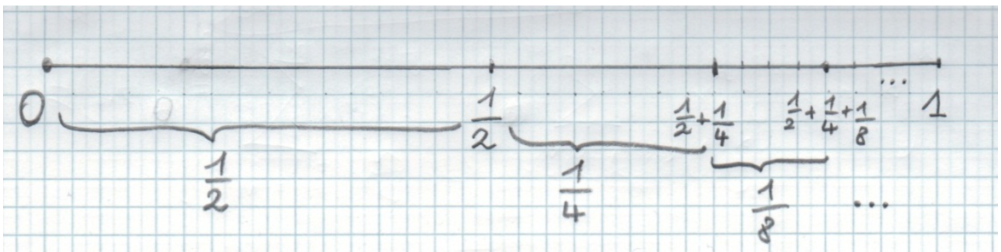
§4. Le serie di numeri reali

SERIE DAPPERTUTTO:

Il precedente argomento mostra come il concetto di "somma di infiniti numeri" (serie numerica) compare in modo naturale nella soluzione del Paradosso di Zenone. Di fatto, lo stesso concetto compare anche nel Paradosso dello Stadio[2] di Zenone, paradosso di tipo **dicotomico** (=bisezioni successive) che si può ancora riassumere nella notevole formula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 1.$$

Tale formula ha una evidenza geometrica sconcertante, come abbiamo già visto:



ATTENZIONE: *Questo tipo di identità scardina alla base il vecchio preconcetto greco secondo cui la somma di infinite quantità dia necessariamente infinito.*

[Vale la pena di sottolineare accuratamente questo concetto cardine in classe.]

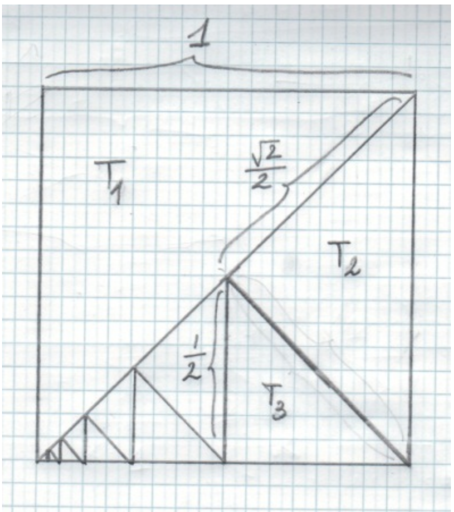
Altri tipi di serie di tipo dicotomico si incontrano "in natura":

Si può proporre allo studente una grande varietà di problemi in cui l'unità (lineare o quadratica) si può suddividere in un **numero infinito di addendi, secondo un principio di esaustione**. Ne proponiamo alcuni a partire da alcuni disegni che si spiegano da sé.

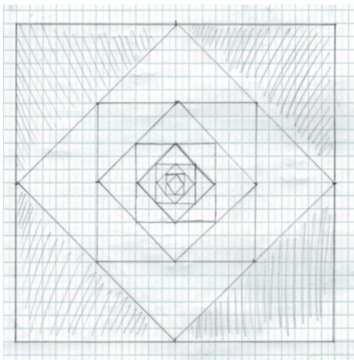
[2] L'agile atleta non arriverà mai al capo opposto dello stadio: infatti non si può giungere all'estremità di uno stadio senza prima aver raggiunto la metà di esso, ma prima di raggiungerla si dovrà raggiungere la metà della metà e così via senza quindi mai riuscire nemmeno ad iniziare la corsa.

[**Per il Docente:** Come attività in classe si può proporre agli studenti di inventare altre simulazioni di processi dicotomici. Il docente avrà cura di scrivere la serie associata al processo e verificare che essa è convergente.]

(1) Si consideri la figura seguente: proporre allo studente di trovare una formula per il lato del triangolo T_n e l'area A_n (ovviamente risulterà $A_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$) . Dedurre nuovamente che $\sum_{n=1}^{\infty} A_n=1$.



(2) Come sopra per l'area A_n del poligono ottenuto unendo i 4 triangoli scuriti (e così via...): ottenere l'identità $\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^2 = 1$.



(3) Prendiamo un segmento di lunghezza 1. Sia N un numero naturale fissato, maggiore o uguale a 2. Dividiamo il segmento in N parti uguali e prendiamo le prime N-1 porzioni; per il restante segmento di lunghezza 1/N facciamo lo stesso processo, dividendoloin N parti uguali e prendendo le sue prime N-1 porzioni; e così via... Si ottiene l'identità

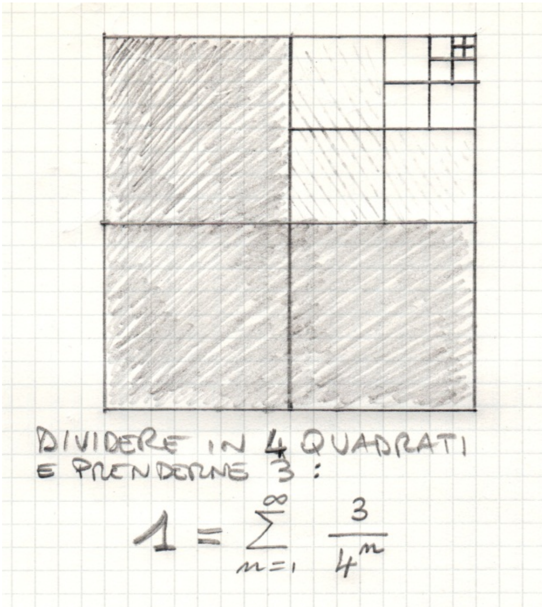
$$1 = \frac{N-1}{N} + (N-1) \cdot \frac{1}{N^2} + (N-1) \cdot \frac{1}{N^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (N-1) \cdot \frac{1}{N^n},$$

da cui la formula

$$\frac{1}{N-1}=\frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}+\frac{1}{N^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N^n}.$$

Vista l'importanza della formula per la somma della serie geometrica (di cui questo è un caso particolare), si propongano agli studenti i casi N=2,3,4.

Nel caso N=4, si può usare la seguente figura:



Il caso N=10 dà la notevole formula

$$\frac{1}{9}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=0{,}1+0{,}01+0{,}001+\cdots$$

che, moltiplicata per 9, dà la famosa identità (inspiegabilmente un *taboo* in certe matematiche delle scuole medie)

$$1=0{,}9+0{,}09+0{,}009+\cdots=0,\bar{9}.$$

ATTENZIONE: *Implicitamente, tutte le identità di tipo "somma di una serie" scritte finora si fondano sul fatto che il resto tra le somme parziali e la candidata somma tende a zero: questo fatto, normalmente non banale da provare, è dimostrato dall'evidenza geometrica del processo esaustivo.*

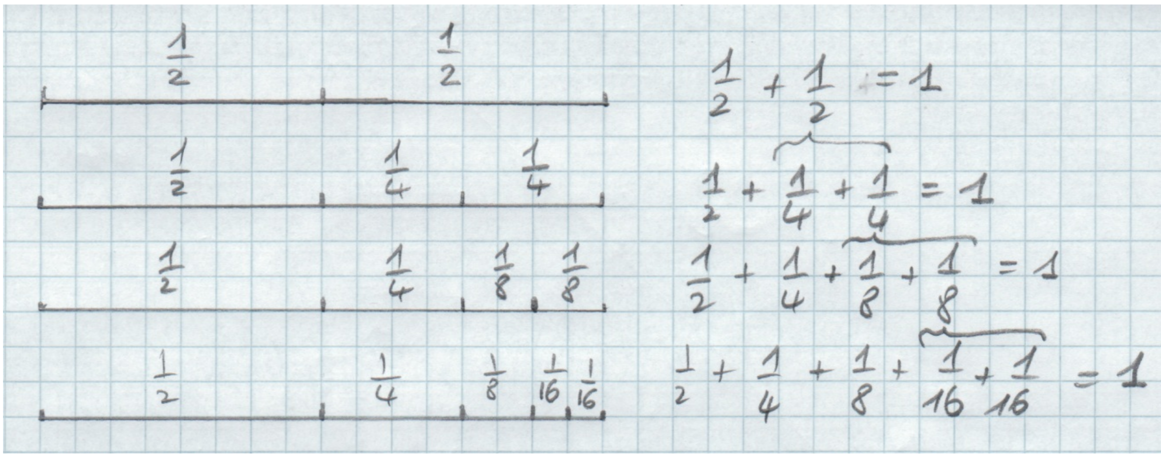
Sembra dunque naturale che lo studente debba accettare in modo preventivo e "naturale" (anche se così ovvio non è) che $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ (negli esempi (1) e (2)) e che pure

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N^n}=0$ (nell'esempio (3)). Questo è il motivo per cui abbiamo pensato di dare preventivamente il concetto di successione infinitesima.

Per rafforzare l'evidenza esaustiva dei processi suddetti, affiancandola a un punto di vista algebrico inequivocabile, si noti che si possono utilizzare delle identità "chiuse" per giustificare le somme di cui sopra: ad esempio

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{2^n}=1$$

Si veda la figura seguente (da proporre sicuramente in classe!):



Più in generale si ha la formula

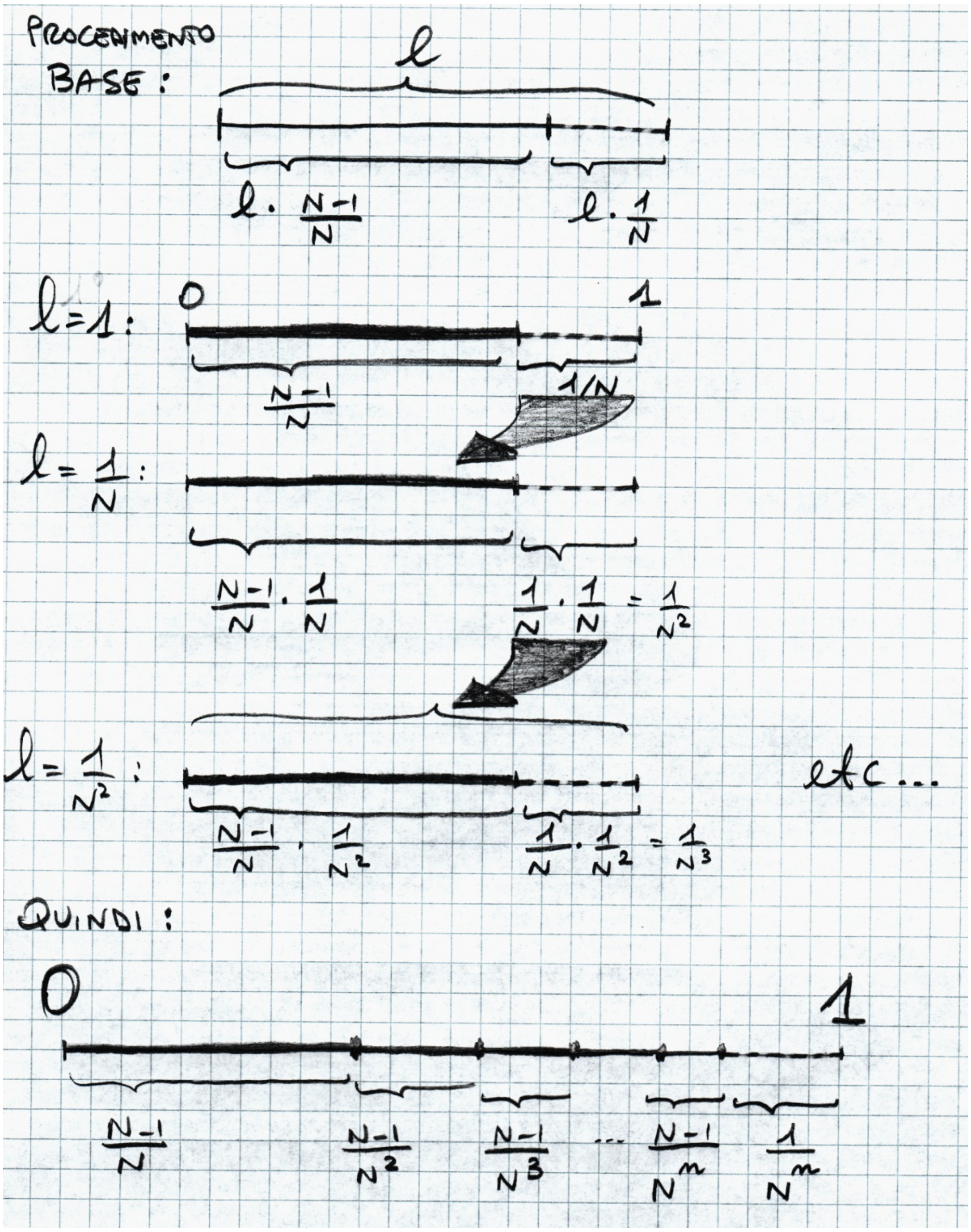
$$(*)\qquad 1=\frac{N-1}{N}+(N-1)\cdot\frac{1}{N^2}+(N-1)\cdot\frac{1}{N^3}+\cdots+(N-1)\cdot\frac{1}{N^n}+\frac{1}{N^n}.$$

[**Per il Docente:** Nelle classi più avanzate (?III, IV, V) si possono proporre questi come begli esercizi sul Principio di Induzione!]

Il caso particolare di N=4 è ben visibile nella figura del quadrato diviso in quattro parti:

$$1=\frac{3}{4}+3\cdot\frac{1}{4^2}+3\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots+3\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^n}.$$

Per spiegare la somma nella formula $(*)$ di cui sopra, si può usare il ragionamento "frattale" (nel senso intuitivo di: "ad ogni passo la figura assomiglia a sé stessa...") descritto nella figura seguente: ad ogni passo, spezzo un segmento di lunghezza ℓ in due parti, di cui una è proporzionale a (N-1)/N e l’altra è proporzionale a 1/N e scarto quest’ultima (su cui vado a ripetere il detto procedimento):



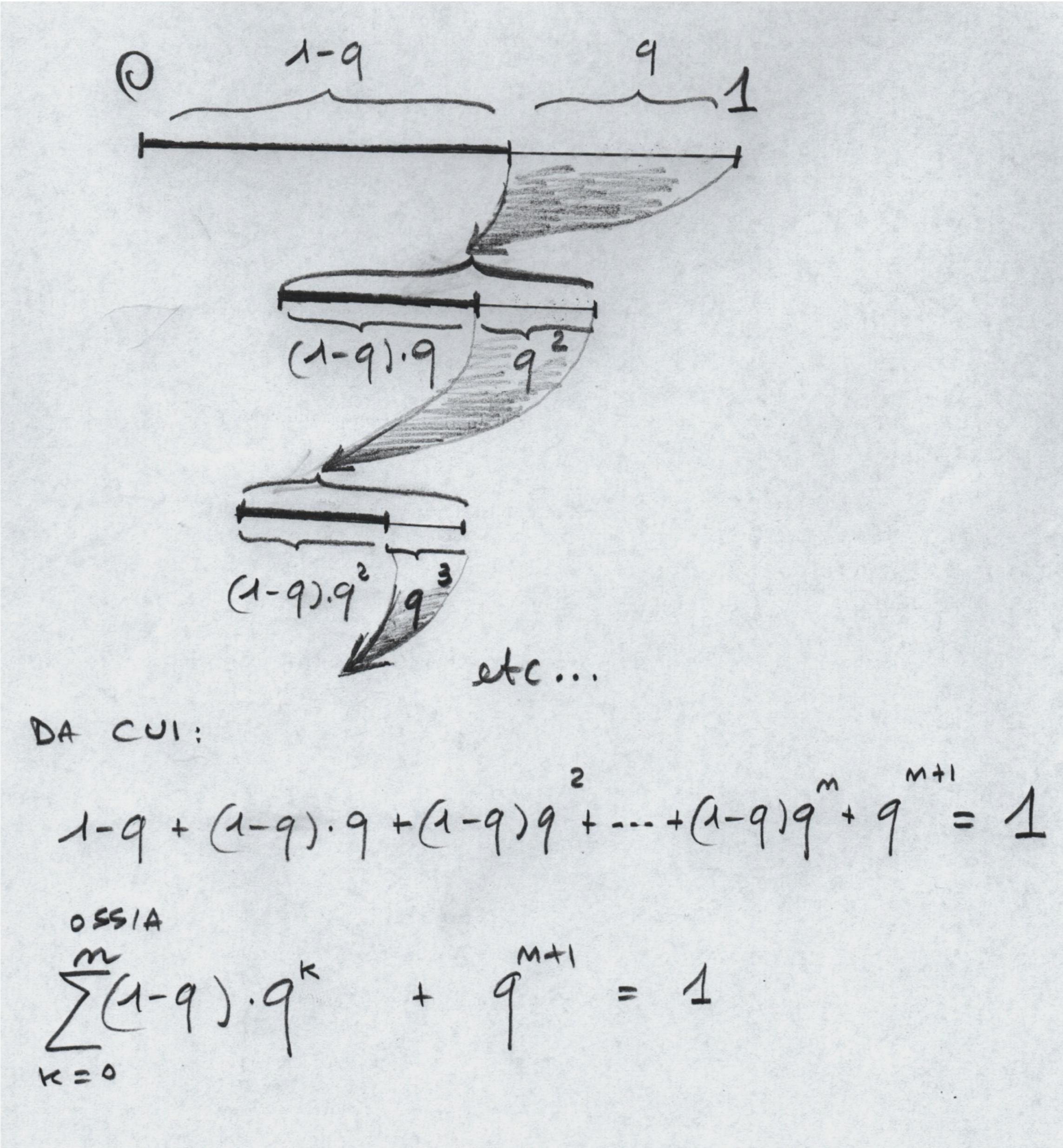
§4.1 LA SERIE GEOMETRICA

In generale, dato $q \in (0;1)$, proponiamoci di trovare una giustificazione geometrica “convincente” della fondamentale **somma della serie geometrica:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Anche in questo caso instauriamo un procedimento induttivo di tipo “frattale”: spezziamo un segmento di lunghezza ℓ (per ℓ=1, q, q^2, q^3,...) in due parti, una proporzionale a (1-q) ed una proporzionale a q; la prima parte viene tenuta (e sommata alle altre della stessa specie), la seconda di queste parti subisce lo stesso procedimento...

Si osservi la seguente figura:



Ne segue la bellissima formula (esercizio sul Principio d’Induzione?)

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = 1,$$

che normalmente viene provata col seguente trucco (valido per ogni $q \neq 1$):

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \cdot \frac{1-q}{1-q}$$

$$= \frac{(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1})}{1-q}$$

(operano molteplici cancellazioni...)

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Ancora una volta, appellandoci al fatto che lo studente ha già accettato che la quantità $q^{n+1}=q\cdot q^n$ tende a zero per $n \to \infty$ (essendo $q \in (0;1)$), si ottiene

$$(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1,$$

da cui la formula desiderata

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

§4.2 LA NECESSITA' DI UNA DEFINIZIONE FORMALE

Per sottolineare l'importanza che i suddetti "resti" tendano a zero (fatto la cui importanza sfuggirà, mediamente, allo studente) analizziamo alcuni esempi notevoli.

Se un procedimento simile a quello delle bisezioni successive viene condotto utlizzando frazioni diverse, come

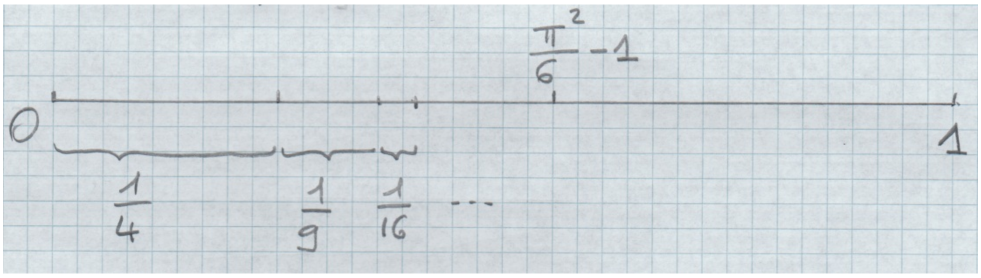
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

la somma che si ottiene **non è 1.** Questo equivale a dire che la differenza tra 1 e le somme parziali

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

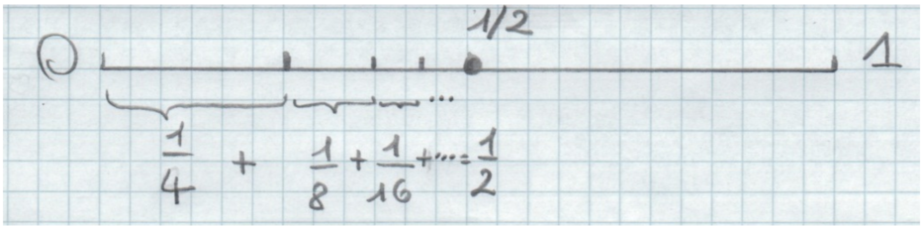
non tende a zero. Si può infatti dimostrare che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0{,}64$$



[La prova di questo fatto è tutt'altro che banale (!), ma conviene sottolinearlo debitamente.] Un esempio alla portata dello studente (che ha finora seguito questi contenuti) farà al caso: basterà considerare la metà della serie dicotomica usuale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1}{2}.$$



Questo fenomeno (per noi assai banale in realtà) può non essere scontato per lo studente e deve abituarlo al fatto che "è la serie a decidere dove fermarsi..." (da qui un primo parziale scorcio sulla necessità di una definizione rigorosa di somma di una serie).

♦♦♦

Inventiamo due varianti al Paradosso di Achille e la Tartaruga.

(a) "ACHILLE STANCO"

Supponiamo che Achille, stanco per due millenni di gare con la Tartaruga, non si muova più a velocità costante, ma, procedendo a balzi successivi, egli impiega un secondo per compiere ogni balzo e la falcata si dimezza ad ogni salto. Sapendo che col primo balzo percorre mezzo miglio, quanto tempo ci mette a percorrere un miglio intero?

Porre la domanda alla classe e sentire le risposte...

Naturalmente la risposta corretta è "non esiste un numero finito di balzi atto a tale scopo". Supponendo infatti di usare come unità di misura il miglio, ci stiamo chiedendo se esiste un numero naturale *n* tale che

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\geq 1.$$

Come sappiamo, solo al limite si ha $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$, e quindi il problema non ha soluzione. Il problema, assai semplice, vuol fare riflettere lo studente sul fatto che $n=\infty$ non è un numero; alternativamente si può far riflettere lo studente sul fatto che il problema sarebbe risolubile se e solo se il cerchio fosse quadrabile mediante le aree dei poligoni inscritti!!

(b) ACHILLE "STANCO ma dopato" (la serie armonica semplice)

Supponiamo che l'Achille stanco dell'esempio precedente, reso più energico da un aiuto divino, spicchi dei balzi (sempre uno ogni secondo di tempo) di ampiezza un po' più ampia di quelli precedenti: il primo balzo è ampio 1/2, il secondo è ampio 1/3, il terzo è ampio 1/4 ..., il salto n *-esimo è ampio* $\frac{1}{n+1}$.

Prima domanda da porre agli studenti: Accadrà, come nell'esempio precedente, che Achille non riesca mai ad oltrepassare l'1?

Invitare gli studenti a calcolare l'ampiezza dopo tre salti:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1.$$

Come appare chiaramente, l'1 viene oltrepassato già con il terzo salto.

Seconda domanda da porre agli studenti: Premesso che questo non può essere 1, c'è un altro punto sull'asse reale che non viene mai superato? Pilotare la risposta degli studenti verso la risposta (errata!) che un tale punto esista certamente, *facendo osservare che le ampiezze diventano sempre più prossime a zero...*

Ovviamente le scopo di questo esempio è stuzzicare il pregiudizio di una assai consistente parte degli studenti (anche universitari!!) secondo cui *una serie associata ad una successione infinitesima converge sempre*...

[È possibile anticipare fin da ora la tabella presentata più avanti in cui si mostrano quanti salti sono sufficienti a superare, via via, i primi numeri naturali 2, 3, 4, 5, ... Lo studente dovrebbe essere colpito sia dal numero di salti necessari a tali scopi, sia dal fatto che questo processo di valico di tutti i numeri naturali è purtuttavia *possibile.*]

Presentiamo l'argomento classico per dimostrare che la **serie armonica semplice** è divergente, in simboli:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

Ne seguirà che anche la serie proposta sopra $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ è divergente (il fatto di aver eliso il primo addendo 1 aveva solo lo scopo di non palesare subito che 1 è valicato al primo passo). Si considerino le stime nella seguente figura:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}+\cdots$$

In generale si ha:

$$\cdots\frac{1}{2^k}+\underbrace{\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{>\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}-2^k}{2^{k+1}}=\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}}$$

(ho $2^{k+1}-2^k$ addendi)

Quindi, arrivati ad ogni addendo del tipo $\frac{1}{2^k}$ (con $k\in N$), le somme parziali incrementano di ½. Prendendo queste somme a due a due si ha un incremento unitario. Si veda la figura seguente che riassume tutto:

$$\underbrace{1}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2^1}+\underbrace{\cdots+\frac{1}{2^2}}_{>\frac{1}{2}}}_{>1}+\underbrace{\underbrace{\cdots+\frac{1}{2^3}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\cdots+\frac{1}{2^4}}_{>\frac{1}{2}}}_{>1}+\underbrace{\underbrace{\cdots+\frac{1}{2^5}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\cdots+\frac{1}{2^6}}_{>\frac{1}{2}}}_{>1}+\underbrace{\underbrace{\cdots+\frac{1}{2^7}}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\cdots+\frac{1}{2^8}}_{>\frac{1}{2}}}_{>1}+\cdots$$

Dunque,

- giunti fino all'addendo $\frac{1}{2^2}$ la somma parziale è >2,

- giunti fino all'addendo $\frac{1}{2^4}$ la somma parziale è >3,

- giunti fino all'addendo $\frac{1}{2^6}$ la somma parziale è >4,

- giunti fino all'addendo $\frac{1}{2^8}$ la somma parziale è >5,

- etc...

- giunti fino all'addendo $\frac{1}{2^{2p}}$ la somma parziale è $> p+1$.

In definitiva, preso un qualsiasi numero intero p, la somma parziale

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4^p}=\sum_{n=1}^{4^p}\frac{1}{n}$$

è maggiore di p. In tal caso si scrive appunto

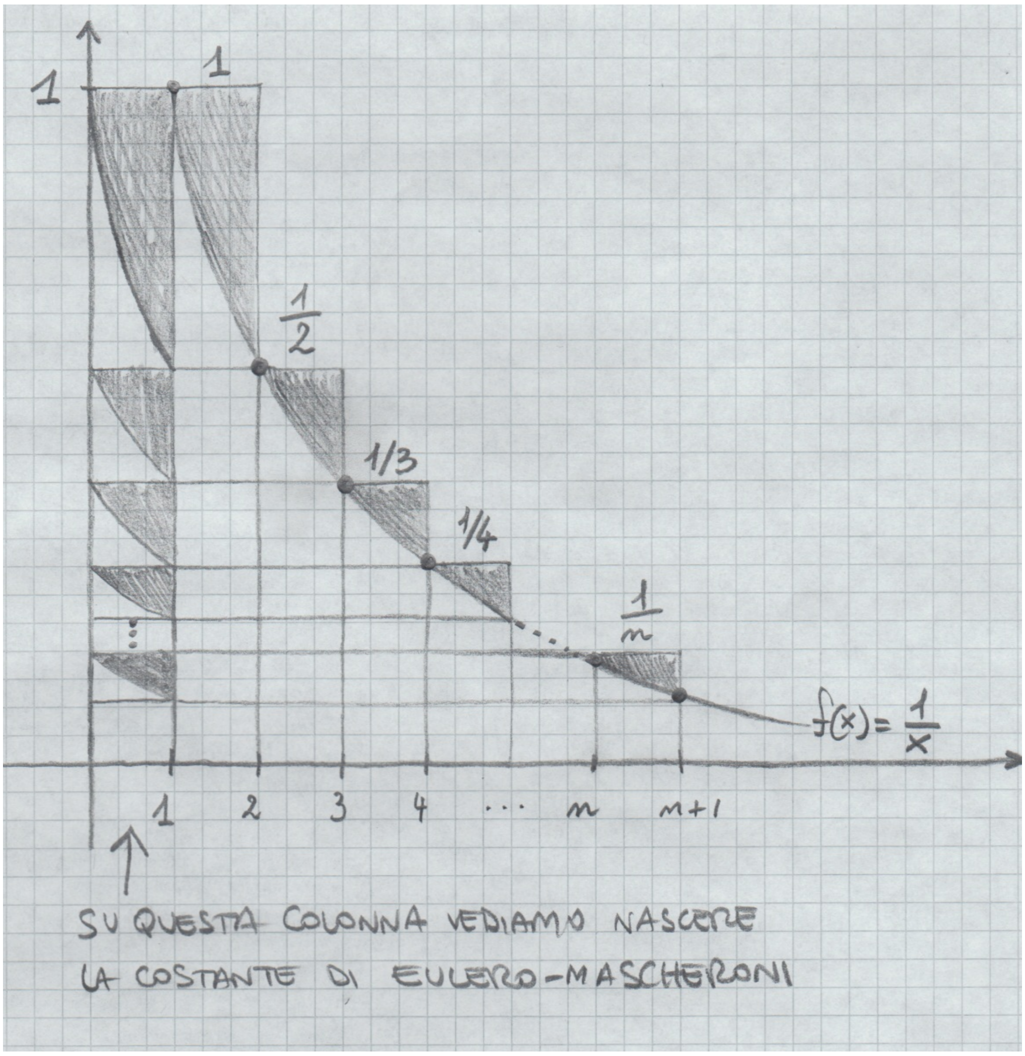
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

Questo argomento dovrebbe far crollare nello studente il pregiudizio per cui una somma di infiniti numeri sempre più piccoli dia sempre un numero reale.

♦♦♦

§4.3 LA SERIE ARMONICA E IL LOGARITMO

Apriamo una parentesi, di interesse indipendente, indagando più da vicino la "magnitudine" con cui la serie armonica semplice $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverge. Benché una piena comprensione di questo fenomeno si abbia solo grazie al calcolo integrale (dunque comprensibile solo nella seconda metà della classe V), si possono ottenere considerazioni interessanti sul "comportamento all'infinito" della funzione logaritmo (interessanti, dunque, anche in III e IV). Si consideri la seguente figura (i due assi sono chiaramente non monometrici), dove compare un pezzo del ramo di iperbole equilatera $xy=1$ (quello avente $x \geq 1$), ossia la porzione del grafico di $f(x)=\frac{1}{x}$ per $x \geq 1$:



L'area del rettangoloide è data ovviamente da

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ .$$

Le porzioni di rettangoloide scurite sono ottenute dalla differenza di tale area con l'area del sottografico di $f(x)=\frac{1}{x}$ relativamente a $x\in[1;n+1]$. Sommando le varie porzioni si ottiene quindi la successione seguente

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx.$$

Come appare evidente dalla figura, la successione c_n ha limite finito (essa è crescente e limitata dall'area del rettangolo di base 1 e altezza 1). D'altra parte

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^{n}\frac{1}{x}dx+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

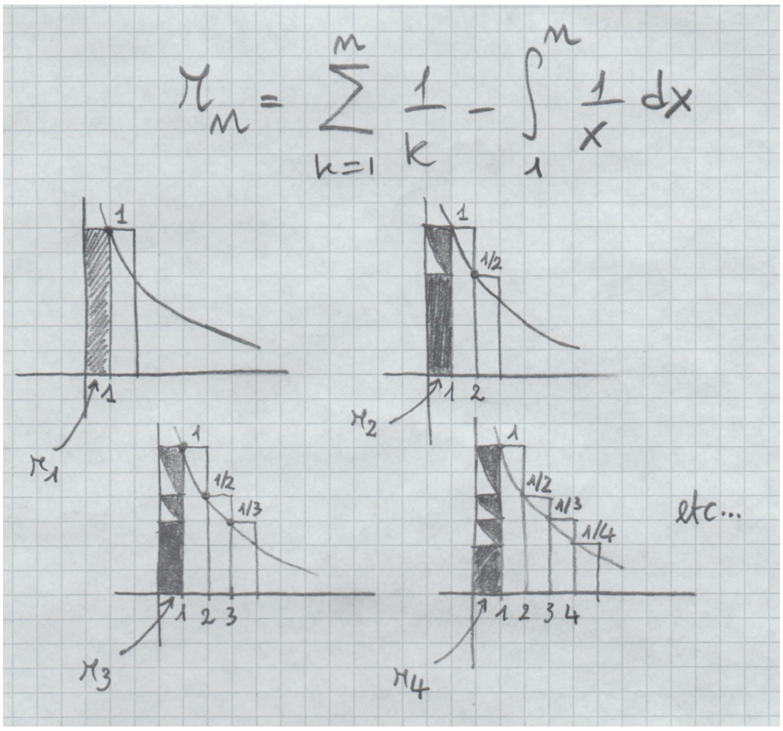
[**Per il Docente:** Per lo studente delle classi antecedenti la V, si può semplicemente dare come enunciato, fatto di per sé assai interessante (con la promessa di dimostrarlo in V), che il valore dell'area del sottografico dell'iperbole equilatera a partire dal punto di ascissa 1 fino a quello di ascissa x è dato da $\ln x$ (una splendida interpretazione geometrica del logaritmo naturale!!).]

Si ottiene dunque

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = c_n + \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Il termine $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tende a zero per $n \to +\infty$, la successione c_n tende ad un valore C (detto costante di Eulero-Mascheroni, $C \approx 0.57721$), quindi la successione delle somme parziali $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge come $\ln(n)$.

Per convincersi che il "resto" $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tende a zero, anche senza disporre della teoria dei limiti (per le funzioni continue), si può anche utilizzare la seguente figura: questa volta la parte scurita rappresenta i termini della successione r_n definita da $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.



Al crescere di n, si vede nascere nuovamente la costante di Eulero-Mascheroni: questo prova che

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)-c_n$$

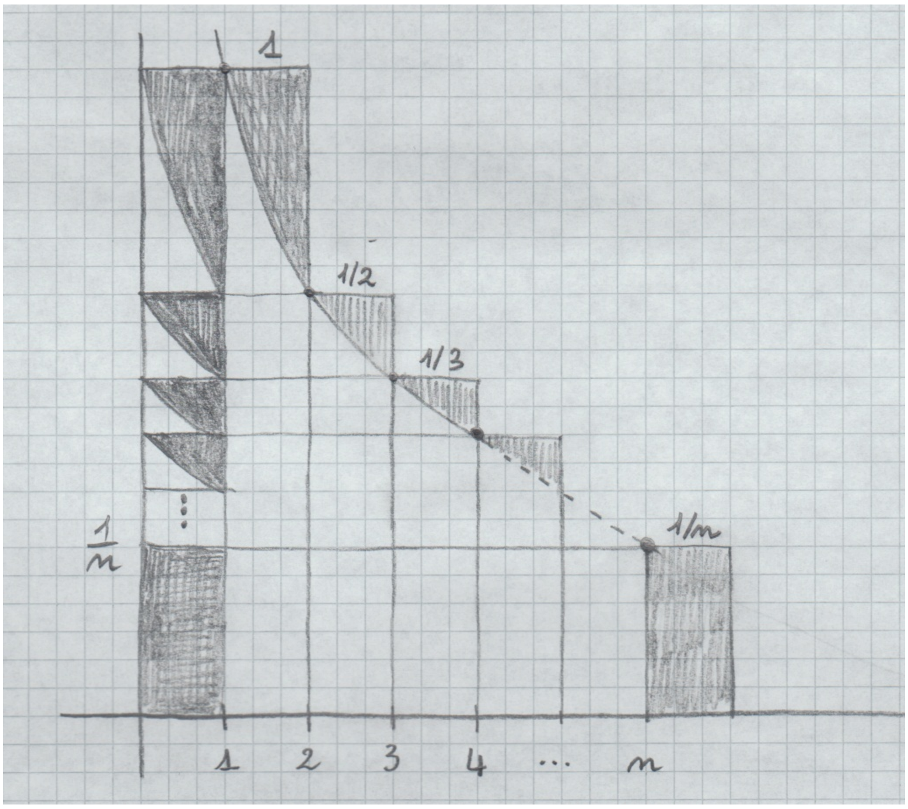
è una successione infinitesima e quindi

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)-c_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

tende a zero. Riassumendo, la successione

$$r_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

rappresentata nella figura seguente



tende (in modo monotono decrescente) alla costante di Eulero-Mascheroni C, e si ha $0<r_n-C<1/n$, da cui r_n-C tende a 0.

Una stima della lenta crescita delle somme parziali della serie armonica (in altri termini, del logaritmo naturale, stanti le formule di cui sopra) è dato dalla seguente tabella (realizzata con Derive).

n (numero dei balzi)	$\sum_{k=1}^{n} 1/k$ (spazio percorso da Achille)
4	≈ 2.1
10	≈ 2.9
$4^2=16$	≈ 3.4
$4^3=64$	≈ 4.7
100	≈ 5.2
$4^4=256$	≈ 6.1
1000	≈ 7.48
$4^5=1024$	≈ 7.5
2000	≈ 8.2
10^4	≈ 9.8
10^5	≈ 12.1

Utilizzando invece la formula precedentemente trovata

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = c_n + \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx 0.5 + \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx \ln n$$

(avendo sostituito c_n col suo limite C, essa si può usare solo per n grande) si possono fare calcoli (meno precisi ma) con un utilizzo di memoria del computer bassissimo:

n (numero dei balzi)	$\sum_{k=1}^{n} 1/k$ (spazio percorso da Achille)
31×10^6	≈ 17.8
10^{10}	≈ 23.6
10^{12}	≈ 28.2
10^{43}	≈ 100

Si tenga presente che in un anno ci sono circa 31×10^6 secondi, quindi, facendo un balzo al secondo, Achille percorre in un anno circa 18 unità. Se invece i balzi sono di ampiezze ½,

¼, 1/8, ... Achille non riuscirebbe nemmeno ad andare oltre una unità con infiniti balzi. Il docente si soffermi, in classe, su questo apparente paradosso matematico per far apprezzare allo studente **la differenza tra una serie divergente e una convergente**...

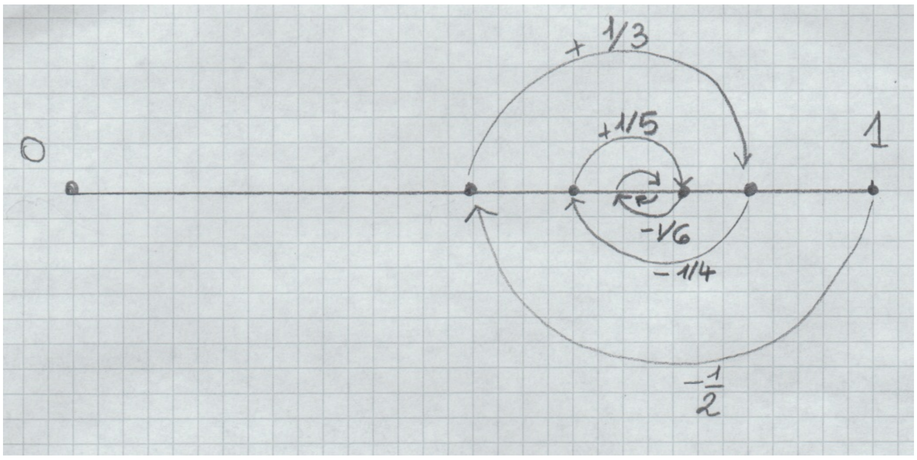
> Osserviamo esplicitamente *che il procedimento di cui sopra si può ripetere per tutte le funzioni continue $f(x)$ non negative e decrescenti su* $[1;+\infty)$. Esso dà origine al cosiddetto **criterio integrale** per la convergenza delle serie: esso afferma che
>
> $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge se e solo se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

§4.4 OPERAZIONI ILLECITE SULLE SERIE

Non è difficilie dimostrare che la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

è convergente. Si analizzi infatti con cura la figura seguente: le somme parziali con indice dispari decrescono (e sono limitate) quindi hanno limite finito, diciamo d; le somme parziali con indice pari crescono (e sono limitate) quindi hanno limite finito, diciamo p; e d=p poichè la differenza tra due somme parziali consecutive tende a zero.



Non altrettanto facile è trovare il valore della somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

In ogni caso si tratta di un numero reale positivo. Manipoliamo la somma infinita *come se fosse finita*, associando dei termini o spostando degli addendi come nella seguente figura:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots$$

$$1 = (2-1) \qquad \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \qquad \frac{1}{5} = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) \qquad \frac{1}{7} = \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7}\right) \qquad \frac{1}{9} = \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right)$$

$$\ln 2 = 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{2}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} + \cdots$$

$$\frac{\ln 2}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots = \ln 2$$

RIORDINO

Ne verrebbe l'assurdo $\ln 2 = \frac{\ln 2}{2}$.

Naturalmente ciò che non possiamo fare è trattare le somme infinite come se fossero somme finite. In particolare **la legge associativa e commutativa possono non valere per le serie** (a segno alterno, mentre valgono per serie i cui termini sono definitivamente positivi o definitivamente negativi; risultato per nulla banale!).

Un'altra operazione illecita è l'utilizzo della relazione d'ordine come si farebbe per somme finite. Ad esempio: è ovvio che

$$\frac{1}{n} < 1 \qquad \forall\, n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Sembrerebbe seguirne

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=2}^{\infty} 1.$$

La seconda serie è uguale a ∞. Ne seguirebbe

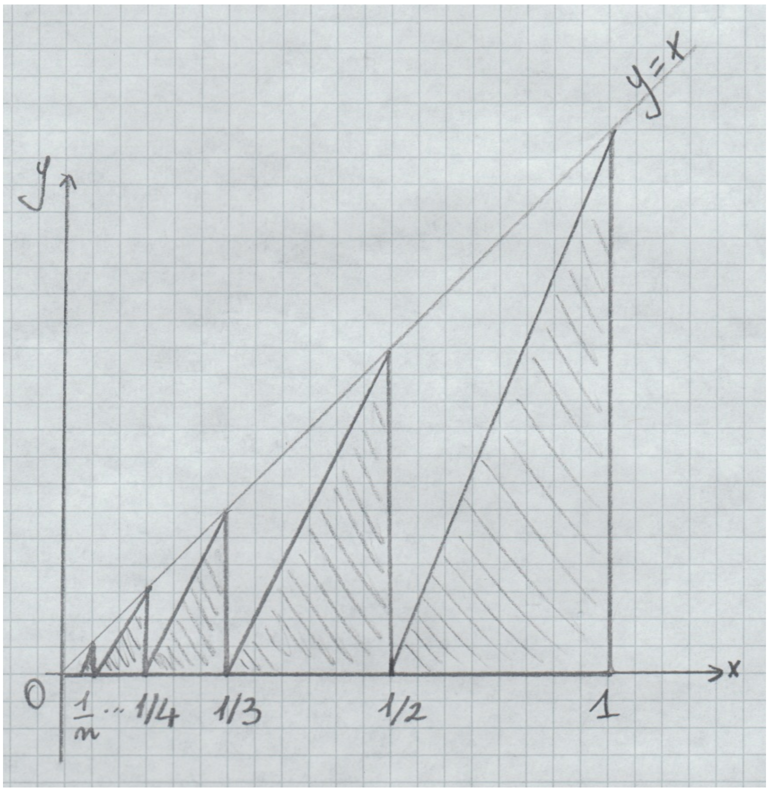
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty.$$

Invece la prima serie è anch'essa uguale a ∞. Anche in questo caso l'errore risiede nell'aver preteso di estendere le proprietà delle somme finite alle somme infinite.

Si possono creare un'infinità di esempi simili, ad esempio lavorando con la serie alternante di cui sopra: si può infatti trovare, per ogni numero reale r, un suo riordinamento che ha per somma r e lo stesso vale se al posto di r si prendono $+\infty$ o $-\infty$.

[Si potrebbe proporre in classe dicapire come si può ottenere ad esempio $+\infty$. Ma non è banale...]

Un ultimo esempio di “pensiero illecito” relativo ai procedimenti seriali, ben più sottile dei precedenti, ci viene dalla teoria della misura di curve e superfici. Si consideri la figura seguente:



Il perimetro della figura costituita dagli infiniti triangoli scuriti supera la somma della serie associata alle sole altezze: tale serie è ovviamente data da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, ossia il perimetro è infinito! Tuttavia l’area della figura è finita! Essa non può superare infatti ½, poichè la figura è un sottoinsieme proprio del triangolo rettangolo di base e altezza 1.

Non c’è quindi alcun legame tra la misura delle superfici e quella dei loro bordi. Questo fenomeno è alla base dei processi cosiddetti “frattali” e lo reincontreremo considerando *l’insieme ternario di Cantor e la sua misura*...

Questo dovrebbe inquivocabilmente convincere lo studente che ogni volta che interviene l’infinito matematico si deve avere cura di manipolarlo come insegna la Matematica: cioè con cura e rigore! Per quanto suggestivo e rispondente ad esigenze umane, scientifiche o filosofiche, ogni uso dell’infinito va contestualizzato: nel caso dell’infinito di cui fa uso l’Analisi Matematica, ogni contesto in cui esso interviene (ad esempio, nel processo di passaggio al limite, nell’uso dei numeri reali, nella definizione di sup e inf di un sottoinsieme di R, nel concetto di derivata o integrale...) prevede precise definizioni ed operazioni ammissibili; violando queste operazioni o applicando male le definizioni si finisce per uscire dal detto contesto, e la pretesa di ottenere dei risultati matematici veri diventa completamente vana.

Siamo quindi persuasi della necessità dell'attesa definizione formale di somma di una serie; utilizzando la nozione di successione infinitesima già introdotta, questa definizione può essere data nel modo seguente:

DEFINIZIONE DI SOMMA DI UNA SERIE

Sia data una successione di numeri reali a_1, $a_2, \dots, a_n, \dots$ Si dice che la serie[3] $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente se esiste un numero reale C tale che la successione dei resti

$$r_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - C = \sum_{i=1}^{n} a_i - C$$

è infinitesima. Ricordando la definizione (semplificata) di successione infinitesima data in precedenza, questo equivale a richiedere che:

per ogni $k \in N$ esiste $n(k) \in N$ tale che $|\sum_{i=1}^{n} a_i - C| < 1/10^k$ ogniqualvolta $n \geq n(k)$.

> [Naturalmente il Docente può scegliere se dare la definizione più generale (equivalente!) con l'epsilon:
>
> per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in N$ tale che $|\sum_{i=1}^{n} a_i - C| < \varepsilon$ ogniqualvolta $n \geq n(\varepsilon)$.]

In tal caso si scrive

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = C,$$

e C si chiama somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Si scrive invece

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = +\infty,$$

se[4] per ogni $M > 0$ esiste $n(M) \in N$ tale che $\sum_{i=1}^{n} a_i > M$ ogniqualvolta $n \geq n(M)$. In tal caso si dice che la serie diverge (a $+\infty$).

Si può dare una definizione analoga per il caso $-\infty$:

per ogni $M > 0$ esiste $n(M) \in N$ tale che $\sum_{i=1}^{n} a_i < -M$ ogniqualvolta $n \geq n(M)$.

Se nessuno dei casi precedenti sussiste, si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è oscillante.

---

[3] Far osservare allo studente che qui la parola "serie" si riferisce solo al simbolo "$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$" e nessuno di tali concetti si riferisce a un numero o alla somma di numeri.

4 Alternativamente il docente potrebbe prendere $M \in N$ per semplicità e per analogia con quanto fatto nel caso della serie armonica semplice.